第64卷 第6期 天 文 学 报 Vol. 64 No. 6
2023年11月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Nov., 2023

doi: 10.15940/j.cnki.0001-5245.2023.06.003

斜轴式望远镜动力学建模与鲁棒控制*

梁静思[1,2] 王海仁[1†] 左营喜[1] 张明珠[1,2] 高婧婧[1,2] 程文胜[1,2] 王博铖[1,2] 张天哲[1,2]

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210023)
(2 中国科学技术大学天文与空间科学学院 合肥 230026)

摘要 斜轴式望远镜是一种新颖的望远镜结构, 其独特的结构设计更适合南极等极端气候环境, 但目前国内外缺乏针对斜轴式望远镜详细的动力学建模与控制研究. 提出一套斜轴式望远镜动力学建模与鲁棒控制方法, 首先, 对斜轴式望远镜进行了动力学分析, 采用拉格朗日法建立望远镜2自由度刚体模型; 接着, 结合望远镜驱动系统的柔性和所受干扰, 完成了斜轴式望远镜的干扰情况下刚柔耦合系统数学模型的推导; 然后, 针对抗干扰问题, 根据所建数学模型, 设计了基于干扰观测器的滑模控制器, 对于所受干扰进行抑制, 实现了斜轴式望远镜的鲁棒控制; 最后, 仿真结果显示, 在考虑模型的非线性外部干扰的情况下, 相比于传统的比例-积分-微分控制器, 基于干扰观测器的滑模控制器使得系统具有更好的动态性能和抗干扰特性.

关键词 **技术: 高角分辨率, 指向控制, 非线性控制, 其他诸多方面**

中图分类号: P111; **文献标识码**: A

1 引言

不同于传统的赤道式望远镜和地平式望远镜, 斜轴式望远镜是一种具有特殊结构的新型望远镜. 该类型望远镜采用了独特的斜轴式机架结构, 外形紧凑, 整个机架可置于封闭式外罩保护之下, 将望远镜内部设备与外界隔离, 增强了极地等恶劣环境下的适应性. 目前仅有南极德国O'Higgins 9 m射电望远镜采用该构型, 中国科学院紫金山天文台正在预研的南极DomeA 5 m太赫兹望远镜(5 m Dome A Terahertz Explorer, DATE5)也准备采用该构型[1]. 斜轴式结构双轴呈现出非正交性, 双轴的动力学特性具有高度的耦合性, 增加了望远镜指向系统力学分析的难度[2–3]. 目前已有对于斜轴式望远镜运动学分析的相关研究[2–5], 但是尚无详细完整的动力学分析研究, 而详细动力学分析是控制器设计的基础. 最常见的地平式望远镜双轴正交, 高度轴与方位轴的运动相对独立, 可以分别对两者进行动力学建模. 但斜轴式望远镜的构型更加复杂, 为了准确地描述望远镜的动力学特性, 需要对双轴进行综合分析, 构建一个多输入、多输出系统模型. 对于多体系统的力学分析方法可以分为牛顿法和拉格朗日法, 牛顿法建立在牛顿三定律基础之上,

2022-06-20收到原稿, 2022-08-15收到修改稿

*国家自然科学基金项目(11873100)、国家重点研发专项(2018YFA0404702)、中国科学院基础前沿科学研究计划(ZDBS-LY-SLH019)、中国科学院青年创新促进会会员(2019315)及中国科学院国际合作交流重点项目(114332KYSB20190009)资助

†hairenwang@pmo.ac.cn

通过对单体进行受力分析以获得动力学方程, 该方法较为直观、便于理解, 但是在复杂的非自由系统中, 对于其约束力的分析往往变得异常困难. 拉格朗日力学从能量角度出发, 利用虚功原理用数学分析的方法统一处理任意非自由质点的动力学问题, 避免了繁琐的力学分析, 更加适用于对于复杂系统的分析.

望远镜的指向精度依赖于控制算法的设计. 目前, 传统的望远镜指向伺服控制器主要是比例-微分-积分(Proportion-Integration-Differentiation, PID)控制器[6]. PID控制器是工业上运用最广泛的控制器, 其结构简单、稳定性好、参数调节方便. 但在高精度、高非线性等应用场景下, PID控制器难以满足要求. Gawronski研究了线性二次高斯(Linear-Quadratic-Gaussian, LQG)控制器、H_∞控制器在大型望远镜指向控制上的运用[7]. LQG控制器是基于优化理论的线性二次高斯最优控制器, 该控制器对于测量噪声有很好的抑制作用, 能够实现系统内部状态极点的任意配置, 但LQG对于建模误差非常敏感. H_∞控制器是一种鲁棒控制器, 该控制器充分考虑了外部干扰对于系统的影响, 通过极小化扰动对于模型输出的H_∞范数, 实现系统的鲁棒控制. 但H_∞鲁棒控制器的鲁棒性往往是以控制器的保守性换来的, 即牺牲闭环系统的动态特性. 基于干扰观测器(Disturbance Observer, DOB)的鲁棒控制策略是一种新型的控制器设计思路[8], 该方法通过设计干扰观测器, 通过系统可测变量来估计系统所受干扰的大小, 这种干扰既包括外部扰动, 也包括系统的建模误差与模型不确定性. 该方法的最大优点在于可以将系统的闭环系统设计与抗干扰设计分离, 实现系统鲁棒性和闭环动态性能兼得的效果. 为了减少系统噪声的影响, 一般避免用干扰观测器估计高频扰动, 对干扰观测器进行带宽限制, 因此将存在部分残余干扰. 滑模控制器(Sliding Mode Controller, SMC)是一种非线性鲁棒控制器, 对于外部干扰和不确定性具有很强的鲁棒性, 将滑模控制器与干扰观测器相结合可以进一步提高系统的鲁棒性[9].

本文提出了一种斜轴式望远镜综合动力学建模方法以及鲁棒控制策略. 首先, 对斜轴式望远镜进行动力学建模. 用拉格朗日法建立斜轴式望远镜刚体动力学模型; 再结合结构的柔性和干扰因素, 建立了包含干扰项的斜轴望远镜综合模型; 其次, 依据所建模型, 设计基于干扰观测器的滑模控制器(Disturbance Observer based Sliding Mode Controller, DOSMC), 将干扰观测器与滑模控制器相结合, 实现望远镜的鲁棒控制; 最后, 仿真实验显示, 相比于传统的PID控制器, 本文提出的控制算法使得系统具有更好的动态特性和抗干扰特性.

2 动力学建模与分析

2.1 模型概述与坐标系的建立

斜轴式天文望远镜示意图如图1所示. 图1左图显示了斜轴式望远镜的整体结构, 该结构可以分为三个部分, 分别为基座部分、方位轴部分和斜轴部分. 基座部分固定于地面, 其不可转动, 在考虑自由度时可将其忽略; 方位轴部分位于基座之上, 其转轴垂直于地面, 可绕方位轴360度旋转, 且具有较好的对称性, 可将其视为质心在轴线上的刚体; 斜轴部分位于方位轴之上, 其转轴与地面呈45度角, 可绕斜轴360度旋转, 但其质心偏离轴线比较明显, 必须考虑其转动过程中转动惯量的变化.

根据上述分析, 在不考虑结构柔性的情况下, 将斜轴望远镜看成由方位轴部分和斜轴部分组成2自由度(Degree of Freedom, DOF)刚体系统, 如图1右图所示. 图1右图给出了本文中的笛卡尔坐标系建立方式, 即以方位轴转轴为z轴且正方向朝上, 方位轴与地面交点为坐标系原点, 由于方位轴的对称性, 可以选取平行于地平面的任意一个方向为x轴方向, 再根据右手定则即可确定y轴方向. 在转动过程中, 方位轴与斜轴的转动角度分别定义为θ_a和θ_s. 望远镜的指向方向定义为抛物面天线轴线指向方向, 该方向与斜轴呈45度角. 在方位轴角度和斜轴角度分别在$0^\circ-360^\circ$范围内变化时, 有且仅有一个位置可以使望远镜的指向方向与地平面平行, 定义此时的方位轴角度θ_a和斜轴角度θ_s为各自的角度零点. 图1右图还标出了斜轴式望远镜动力学建模关键参数: 4×4齐次矩阵形式的方位轴和

斜轴的转动惯量矩阵, 分别表示为$\boldsymbol{I}_{\mathrm{a}}$和$\boldsymbol{I}_{\mathrm{s}}$, 斜轴部分质量表示为$m$; 定义辅助点$P$为斜轴部分质心到斜轴的投影点, 则$P$到地平面的距离、到$z$轴的距离和到斜轴的距离分别称为$l_1$、$l_2$和$l_3$.

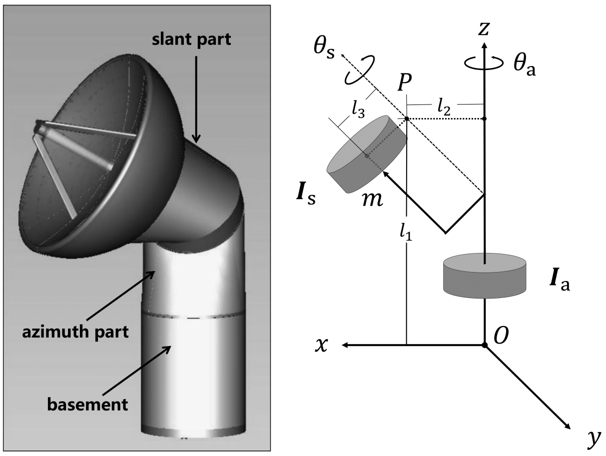

图 1　斜轴式望远镜: 结构示意图(左), 2DOF系统示意图(右)

Fig. 1　Slant-Axis Telescopes: sketch of structure (left), sketch of 2-DOF system (right)

为了表达的简便性, 本文采用齐次坐标描述系统的运动学与动力学特性, 用$\boldsymbol{R}_x(\cdot)$、$\boldsymbol{R}_y(\cdot)$和$\boldsymbol{R}_z(\cdot)$分别表示以x轴、y轴和z轴为转轴的齐次旋转矩阵, $\boldsymbol{T}(\cdot,\cdot,\cdot)$表示齐次平移矩阵, 具体表达式定义为:

$$\boldsymbol{R}_x(\phi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0\\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\phi)=\begin{bmatrix}\cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\phi)=\begin{bmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi) & 1 & 0\\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{T}(x,y,z)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0 & y\\ 0 & 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中的ϕ表示旋转角度, 此时的x、y、z分别表示在三维方向上的平移距离.

2.2　刚体动力学建模

由于斜轴望远镜两轴的非正交性, 直接进行受力分析过程繁琐, 本文采用拉格朗日法直接获得系统动力学方程, 可避免冗杂的受力分析. 在斜轴式望远镜工作时, 基座部分并无运动, 方位轴部分绕方位轴转动, 而斜轴既有平动又有转动. 因此, 总动能包括方位轴部分的转动动能、斜轴部分的平动动能和转动动能. 在齐次坐标系下, 方位轴角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}=\left[0\ 0\ \dot{\theta}_{\mathrm{a}}\ 0\right]^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

斜轴角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}+\boldsymbol{R}_z\left(\theta_a\right)\cdot\boldsymbol{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[0\ 0\ \dot{\theta}_{\mathrm{s}}\ 0\right]^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

为了描述系统的动力学特性, 还需要利用系统的一些几何参数和惯性参数. 斜轴质心的速度计算相对复杂, 首先, 给出质心的位置表达式

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{R}_z(\theta_{\mathrm{a}})\boldsymbol{T}(l_2,0,l_1)\boldsymbol{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{R}_z(\theta_{\mathrm{s}})[l_3\ 0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

则其速度表达式可以表示为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}=\frac{\partial\boldsymbol{p}_{\mathrm{s}}}{\partial t}. \tag{8}$$

由于转动惯量矩阵是用相对坐标系描述的, 因此需要给出绝对坐标系到相对坐标系的变换矩阵, 方位轴的绝对坐标系到相对坐标系的变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{R}_z(\theta_{\mathrm{a}}), \tag{9}$$

斜轴的绝对坐标系到相对坐标系的变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{R}_z(\theta_a)\boldsymbol{T}(l_2,0,l_3)\boldsymbol{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{R}_z(\theta_{\mathrm{s}}), \tag{10}$$

则系统的总动能为

$$L=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{s}}+\frac{1}{2}mv_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\,. \tag{11}$$

系统的广义力包含作用在方位轴上的力和作用在斜轴上的力, 广义力用$\boldsymbol{Q}$表示, 有

$$\boldsymbol{Q}=\left[\tau_{\mathrm{a}},\tau_{\mathrm{s}}-\frac{\sqrt{2}}{2}m_s gd\sin\left(\theta_s\right)\right]^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

其中τ_{a}为方位轴驱动力矩, τ_{s}为斜轴力矩, g为重力加速度. 定义望远镜转轴角度向量$\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}}=[\theta_{\mathrm{a}}\ \theta_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}}$, 可得欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{t}}}-\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}}}=\boldsymbol{Q}\,, \tag{13}$$

其中t表示时间, 通过解该矩阵微分方程, 可得:

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{t}}+\mathrm{G}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}})=\boldsymbol{\tau}\,, \tag{14}$$

其中$\boldsymbol{M}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}})$为质量矩阵, 其与望远镜结构块的转动惯量和质量以及望远镜的转轴角度有关, 质量矩阵的具体表达式为:

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}})=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}, \tag{15}$$

其中,

$$\begin{aligned}M_{11}=\frac{1}{4}\big[&3l_3^2m+4l^2m-l_3^2m\cos(2\theta_{\mathrm{s}})+\\&4i_{33}^{\mathrm{a}}+2\cos^2(\theta_{\mathrm{s}})i_{11}^{\mathrm{s}}-2\sin(2\theta_{\mathrm{s}})i_{12}^{\mathrm{a}}+\\&4\cos(\theta_{\mathrm{s}})(\sqrt{2}l_3l_2m-i_{13}^{\mathrm{s}})+2\sin(\theta_{\mathrm{s}})i_{22}^{\mathrm{s}}+\\&4\sin(\theta_{\mathrm{s}})i_{23}^{\mathrm{s}}+2i_{33}^{\mathrm{s}}\big]\,,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}M_{12}=M_{21}=\frac{1}{2}\big[&\cos(\theta_{\mathrm{s}})2l_3l_2m-\sqrt{2}i_{13}^{\mathrm{s}}+\\&\sqrt{2}(l_3^2m+\sin(\theta_{\mathrm{s}})+i_{23}^{\mathrm{s}}+i_{33}^{\mathrm{s}})\big]\,,\end{aligned} \tag{17}$$

$$M_{22}=(l_3^2m+i_{33}^{\mathrm{s}})\,, \tag{18}$$

i_{ij}^{a}、i_{ij}^{s}分别表示惯量矩阵$\boldsymbol{I}_{\mathrm{a}}$和$\boldsymbol{I}_{\mathrm{s}}$矩阵第$i$行第$j$列的元素, $i,j=1,2,3$. $\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}})$为重力矩阵, 与斜轴结构块质量和斜轴角度有关, 其具体表达式为

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}})=\begin{bmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}mgl_3\sin(\theta_{\mathrm{a}})\end{bmatrix}. \tag{19}$$

$\boldsymbol{\tau}=[\tau_{\mathrm{a}},\ \tau_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}}$为输入力矩向量. 由于天文望远镜往往工作在超低速范围内, 因此(14)式中忽略了角速度$\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{t}}$的二次项.

2.3 柔性模型

望远镜的结构柔性来源主要有两方面, 其一在于望远镜的口径较大时结构的刚度降低, 使得结构整体的柔性不可忽略; 其二在于望远镜传动系统的柔性, 主要是齿轮组或者摩擦轮传动时的形变带来的影响. 结构的柔性可以用一阶弹簧模型来描述, 假设电机直接驱动一个转子, 转子经传动机与望远镜的刚体模型通过弹簧连接. 分别定义望远镜方位轴与斜轴的电机角位移为$q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}}$、$q_{\mathrm{m}}^{s}$, 转子惯量为$m_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}}$、$m_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}$, 传动系统的刚度为$k_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}}$、$k_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}$, 传动系统阻尼为$d_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}}$、$d_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}$, 传动比为$r_{\mathrm{a}}$、$r_{\mathrm{s}}$, 电机输入力矩为$\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}}$、$\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}$. 为了表达的简洁性, 本文采用等效参数来描述望远镜的传动系统动力学方程, 等效参数与其对应的物理参数存在着一定的比例关系, 比例关系的大小与传动系数有关. 具体而言, 定义电机等效输入力矩向量为

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{m}}=\begin{bmatrix}r_{\mathrm{a}}^2\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}} & r_{\mathrm{s}}^2\tau_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{20}$$

电机转子等效角位移向量为

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{m}}=\begin{bmatrix}r_{\mathrm{a}}^{-1}q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}} & r_{\mathrm{s}}^{-1}q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{21}$$

定义电机转子的等效惯量矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}=\begin{bmatrix}r_{\mathrm{a}}^2m_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}} & 0\\ 0 & r_{\mathrm{s}}^2m_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}\end{bmatrix}, \tag{22}$$

等效刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}=\begin{bmatrix}r_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}} & 0\\ 0 & r_{\mathrm{s}}k_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}\end{bmatrix}, \tag{23}$$

等效阻尼矩阵为

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}=\begin{bmatrix}r_{\mathrm{a}}d_{\mathrm{m}}^{\mathrm{a}} & 0\\ 0 & r_{\mathrm{s}}d_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}\end{bmatrix}, \tag{24}$$

则电机与传动系统的动力学模型可以用如下方程描述:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{m}} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{t}}) \,, \\ \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{\tau} \,. \end{cases} \tag{25}$$

2.4 综合模型

望远镜伺服控制系统中, 不可避免地存在各种干扰, 这些干扰包括外部风扰动、非线性摩擦力、未建模动态和模型参数误差等, 本文将这些因素统一等效为加载在双轴上的扰动力矩, 定义双轴的扰动力矩分别为$\tau_{\mathrm{d}}^{\mathrm{a}}$、$\tau_{\mathrm{d}}^{\mathrm{s}}$, 以及定义扰动向量$\boldsymbol{d} = [\tau_{\mathrm{d}}^{\mathrm{a}} \ \ \tau_{\mathrm{d}}^{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}}$. 将结构的刚体特性、柔性和扰动进行综合考虑, 根据(14)、(25)式, 可得

$$\boldsymbol{M}_{\mathbf{t}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{M}_{\mathbf{m}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{D}_{\mathbf{m}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{G}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}} + \boldsymbol{d} \,. \tag{26}$$

为了便于控制器的设计, 将上述模型表达式化为标准形式, 选取状态变量$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}} \ \ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{t}}]^{\mathrm{T}}$, 系统输入变量$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\tau}$, 输出变量$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{q}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{x}_1$, 根据(25)式, 可得如下系统方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x}_2 \,, \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{d} \,, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 \,, \end{cases} \tag{27}$$

其中, $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$是时变系数矩阵, 系数矩阵的计算公式为$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{M}_{\mathrm{t}}^{-1}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{G}_{\mathrm{t}})$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{t}}^{-1}$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{t}}^{-1}$.

3 基于干扰观测器的滑模控制器设计

干扰观测器可以利用可测变量, 根据系统的标称模型来估计出系统所受干扰的大小, 能够有效解决干扰变量测量困难的问题. 为了减少系统噪声的影响, 一般避免用干扰观测器估计高频扰动, 对干扰观测器进行带宽限制, 因此将存在部分残余干扰. 滑模控制器是一种非线性鲁棒控制器, 对于外部干扰和不确定性具有很强的鲁棒性. 但在外部扰动较大时, 滑模控制器输出切换频率较大, 实际控制器难以实现无限高的切换频率. 本文将干扰观测器与滑模控制器结合, 设计基于干扰观测器的滑模控制器, 作为斜轴式望远镜的鲁棒控制方案. 第一步, 设计干扰观测器, 根据系统数学模型和输出变量测量值, 设计观测器使得可以根据输出变量对干扰量进行估计; 第二步, 设计滑模控制器, 包括滑模面的设计与趋近率设计, 并据此给出控制律表达式.

3.1 干扰观测器设计

基于干扰观测器的控制器设计是一种应对未知外部扰动和模型不确定性的常见思路, 众多学者对此进行了广泛而详尽的研究[8]. 文献[10]针对时变干扰变量内部动态已知的这一类特定干扰变量进行了讨论, 常见的情况如假定外部扰动恒定或者外部扰动的频谱已知等都可归类为干扰变量内部动态已知. 假设扰动变量$\boldsymbol{d}$内部动态可以用如下的状态空间表达式描述:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\xi} \,, \\ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi} \,, \end{cases} \tag{28}$$

其中, $\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{C}$为2×2常数矩阵, 由已知关于扰动的先验知识决定, $\boldsymbol{\xi}$为2维辅助向量, 用于描述干扰的动态特性. 根据文献[10], 设计如下干扰观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}} = \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Lambda}\left(\dot{\boldsymbol{x}}_2 - \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}\right) \,, \\ \hat{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{\xi}} \,, \end{cases} \tag{29}$$

其中, 可调参数Λ是2维对角矩阵, $\hat{\boldsymbol{d}}$为扰动向量$\boldsymbol{d}$的估计值, $\hat{\boldsymbol{\xi}}$为辅助变量$\boldsymbol{\xi}$的估计值. 下面证明观测器的收敛性. 令观测误差向量$\boldsymbol{e}_{\mathrm{o}} = \boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}$, 根据(27)、(28)、(29)式有

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{o}} &= \dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}} = W\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}\right) - \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{e}_{\mathrm{o}} \,, \end{aligned} \tag{30}$$

则

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{o}} + \left(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{H}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{W}\right)\boldsymbol{e}_{\mathrm{o}} = \mathbf{0} \,. \tag{31}$$

因此, 只要合理配置参数$\boldsymbol{\Lambda}$, 即可保证误差的收敛性, 并且可通过调节(31)式的极点来实现调节误差收敛的速度.

该干扰观测器并非直接观测扰动本身, 而是针对一个辅助内部变量进行观测, 再由辅助内部变

量间接给出扰动值. 通常情况下, 会合理设计$\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{V}$使得该内部动态系统成为一个低通滤波器, 减少观测器输出中的噪声含量. 该滤波器的带宽的确定有两方面的考量: 首先是传感器本身的噪声情况, 该观测器要确保传感器的噪声被合理地抑制; 另外一方面是考虑到扰动本身的动态特性, 对于快速变化的扰动, 过小的带宽会导致观测效果变差, 因此干扰观测器的参数需要根据实际工程情况合理地调节.

3.2 滑模控制器设计

令系统的参考输入为$\boldsymbol{y}^*$, 误差定义为$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{y}^*-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^*-\boldsymbol{x}_1$, 设计如下滑模函数

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{e}+\dot{\boldsymbol{e}}\,, \tag{32}$$

$\boldsymbol{Z}$为待调节的滑模函数参数矩阵. 滑模控制器的性能与滑模趋近律的选取有很大的联系. 为了减小滑模控制的抖振效应, 同时又能保留较强的动态特性, 采用如下滑模趋近律

$$\dot{\boldsymbol{s}}=-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{s}-\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{s}^2\mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{s}\right)\,, \tag{33}$$

其中, $\boldsymbol{K}_1$、$\boldsymbol{K}_2$为对角矩阵且对角元素为正数, sgn(·)表示符号函数[9]. 根据(27)、(32)、(33)式有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{s}}&=\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{e}}+\ddot{\boldsymbol{e}}\\&=\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{e}}+\ddot{\boldsymbol{y}}^*-\dot{\boldsymbol{x}}_2\\&=\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{e}}+\ddot{\boldsymbol{y}}^*-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{d}}\\&=-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{s}-\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{s}^2\mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{s}\right)\,.\end{aligned} \tag{34}$$

可得控制律

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{B}^{-1}\Big[&\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{e}}+\ddot{\boldsymbol{y}}^*-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{d}}\\&+\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{s}+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{s}^2\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})\Big]\,.\end{aligned} \tag{35}$$

为了保证误差的收敛性, 需要进行稳定性证明. 考虑如下李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}\,. \tag{36}$$

根据(33)式, 有

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{s}}\\&=\boldsymbol{s}\left[-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{s}-\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{s}^2\mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{s}\right)\right]\\&=-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{s}^2-\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{s}^3\mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{s}\right)\\&\leqslant\boldsymbol{0}\,.\end{aligned} \tag{37}$$

(37)式说明了系统的收敛性, 从理论上证明了控制器的可靠性.

以上控制器设计过程既利用了干扰观测器, 又利用了滑模控制思想, 所得控制器称为DOSMC. 基于DOSMC的斜轴式望远镜控制系统框图如图2所示.

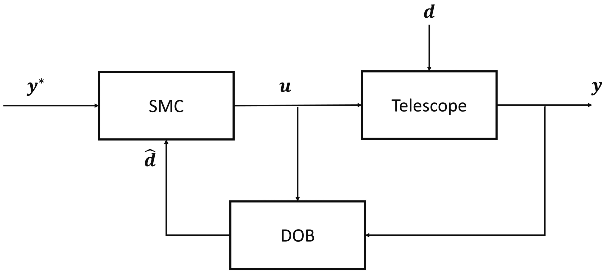

图 2 斜轴式望远镜控制系统框图

Fig. 2 The diagram of the control system of Slant-Axis Telescopes

4 数值仿真

为了验证本文提出的斜轴式望远镜动力学建模与鲁棒控制策略, 设计了仿真实验进行验证. 仿真实验在MATLAB/Simulink环境下完成, 表1给出了斜轴式望远镜动力学模型的仿真参数, 参数符号的定义与2.1、2.2节保持一致, 其中的结构模型的参数提取自DATE5望远镜的有限元模型, 驱动系统模型参数参照了类似尺寸的望远镜[11]. 为了分别验证控制器的动态特性和抗干扰特性, 设计了两组实验, 每组实验分别使用传统的PID控制器(Proportion-Integration-Differentiation Controller, PIDC)和本文提出的DOSMC进行实验. PID控制器的控制律为[12]

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}\int_0^t\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{e}\,, \tag{38}$$

其中, t表示时间, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}$, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}$, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}$是$2\times2$对角矩阵, 为可调节控制器参数. 在本文的数值仿真实验中,

控制器参数保持一致, PIDC的参数为

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix},$$

干扰变量参数矩阵为

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}20 & 0\\ 0 & 20\end{bmatrix},$$

滑模控制器参数为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}20 & 0\\ 0 & 20\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}_{1}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}_{2}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

表 1 仿真参数

Table 1 The parameters of simulation

Item	Value	Unit
l_3	0.2906	m
l_2	0.5532	m
l_1	4.481	m
m	4947.8	kg
$\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$	$\begin{bmatrix}1.0\times10^{4} & 0\\ 0 & 1.0\times10^{4}\end{bmatrix}$	$\mathrm{kg\cdot m}$
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}$	$\begin{bmatrix}2.5\times10^{5} & 0\\ 0 & 2.5\times10^{5}\end{bmatrix}$	$\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-1}}$
$\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}$	$\begin{bmatrix}1.0\times10^{8} & 0\\ 0 & 1.0\times10^{8}\end{bmatrix}$	$\mathrm{N\cdot m^{-1}}$
$\boldsymbol{I}_{\mathrm{a}}$	$\begin{bmatrix}5.4486\times10^{4} & -6.4015\times10^{-2} & -4.0870\times10^{2} & 0\\ -6.4015\times10^{-2} & 5.3761\times10^{4} & 6.9669\times10^{-1} & 0\\ -4.0870\times10^{2} & 6.9669\times10^{-2} & 1.6495\times10^{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	$\mathrm{kg\cdot m}$
$\boldsymbol{I}_{\mathrm{s}}$	$\begin{bmatrix}4.9318\times10^{3} & -1.8967\times10^{-1} & -2.1669\times10^{3} & 0\\ -1.8967\times10^{-1} & 1.0388\times10^{4} & 3.5221\times10^{-1} & 0\\ -2.1699\times10^{3} & 3.5221\times10^{-1} & 9.5686\times10^{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	$\mathrm{kg\cdot m}$

4.1 正弦曲线跟踪实验

根据系统对于典型信号的跟踪能力来判断系统的性能是检测控制器设计优劣的常用手段之一. 分别用PIDC和DOSMC对斜轴式望远镜进行正弦轨迹跟踪实验, 参考系统的参考输入的信号方程为$\boldsymbol{y}^{*}=[10\sin(t)\ 10\sin(t)]^{\mathrm{T}}$, 模型的初始状态全为0. 方位轴与斜轴分别在两种控制器作用下的角度输出以及参考曲线如图3所示. 从图中可以看出, PID控制无法保证完美地跟踪正弦曲线, 会有一定的跟踪滞后. PID作为线性控制器, 使用PID控制器的系统开环传递函数在中高频域难免会有相位滞后, 在跟踪中高频参考正弦曲线时会出现较为明显

的误差. 虽然该现象可以通过增大PID控制器的增益系数来解决, 但由于实际的控制系统中往往会存在高频测量噪声和外部扰动, 高增益可能会导致超调、振动甚至系统的不稳定. 相比之下, DOSMC则能使得输出在0.5 s内完美地跟踪上正弦参考曲线, 这得益于滑模控制器的高增益特性以及滑模趋近律的设计, 并且由于滑模控制器的良好性质, 可以实现高增益与鲁棒性兼得. 仿真实验证明, 相比于传统的PID控制器, DOSMC可以获得更好的动态特性.

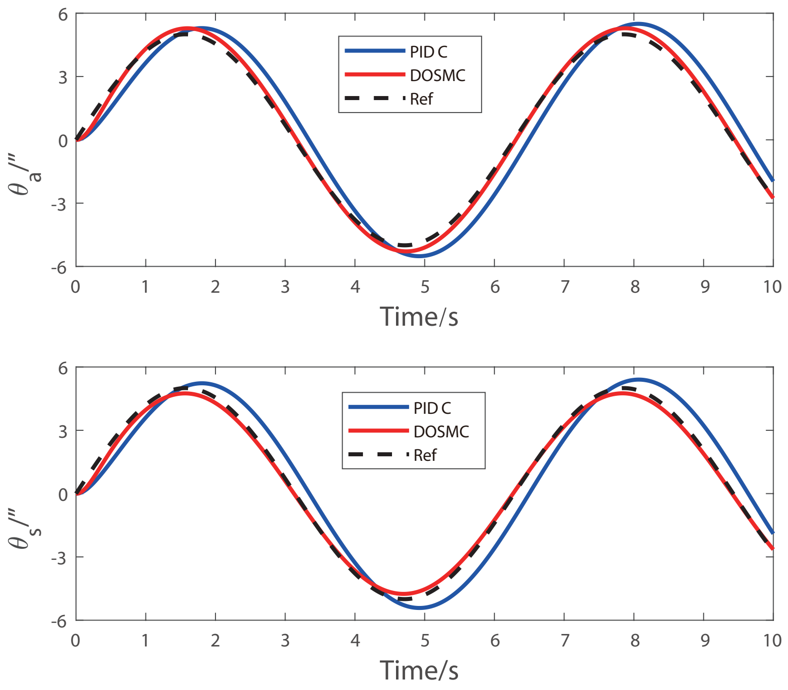

图 3　方位轴与斜轴跟踪实验仿真结果曲线

Fig. 3　Curves in the simulation of the tracking experiences for azimuth axis and slant axis

4.2　随机风载实验

随机风载是露天环境下大型望远镜指向控制系统的主要外部干扰, 测试在随机风载的作用下斜轴式望远镜双轴的指向精度能够很好地体现望远镜指向控制系统的鲁棒性. 随机风载对于望远镜伺服系统的作用可以用有色噪声来模拟[11, 13]. 自然环境下的随机风速的功率谱可以用Davenport风速谱来表示:

$$S_v(\omega) = 4800 v_{\rm m} \kappa \frac{\beta\kappa}{(1+\beta^2\omega^2)^{4/3}}\,, \tag{39}$$

其中, ω表示频率, $v_{\rm m}$表示该地区的平均风速大小, $\beta = \frac{600}{\pi v_{\rm m}}$, h表示主镜中心到地面的距离, h_0表示地面粗糙度, κ表示结构表面的粘性系数[14]:

$$\kappa = \frac{1}{\left[2.5\ln\left(\frac{h}{h_0}\right)\right]^2}\,. \tag{40}$$

根据文献[6], 望远镜轴所受轴向随机力矩大小与随机风速大小之间呈正比:

$$\Delta T = k_{\rm t}\Delta v\,, \tag{41}$$

其中, ΔT表示随机力矩大小, Δv表示随机风速大小, $k_{\rm t}$为力矩系数:

$$k_{\rm t} = \frac{1}{2} c_{\rm t} \alpha_{\rm p} \pi D^3 v_{\rm m}\,, \tag{42}$$

$\alpha_{\rm p}$为空气密度, $c_{\rm t}$为风向折算系数, D为望远镜口径, π为圆周率. 根据南极Dome A的气象情况和DATE5的结构设计, 取平均风速大小$v_{\rm m} = 5$ m/s, 空气密度$\alpha_{\rm p} = 0.6$ kg/m^3, 主镜中心高度$h = 5$ m, 望远镜口径$D = 5$ m; h_0取经验值0.1 m, $c_{\rm t}$取经验值0.25[11]. 生成轴上随机力矩的步骤如下:

(1)根据文献[13]的方法, 生成功率谱为(39)式所示的有色噪声, 表示随机风速;

(2)根据(41)式, 由随机风速生成标量随机力矩.

仿真实验时, 在方位轴和斜轴上各自施加由上述方法产生的随机力矩, 测试望远镜指向控制系统分别在PIDC控制器和DOSMC控制器作用下的抗干扰能力. 实验中, 参考信号为$y_{\rm d} = [0\ \ 0]^{\rm T}$, 模型的初始状态全为0.

首先, 验证DOSMC中干扰观测器的性能. 图4展示了干扰观测器输出仿真结果曲线, 图中分别用红色曲线和蓝色曲线展示了干扰观测器观测结果与干扰力矩的真实值. 从图中可以看出, 观测结果与真实值具有总体上一致的走势, 能够很好地体现干扰力矩的随机波动. 从图中还可以看出, 干扰观测器在保持较高观测效果的同时具有低通滤波效果, 在实际运用中, 通过合理的参数配置, 该特性可以有效地抑制测量噪声.

方位轴与斜轴在两种控制器作用下的角度误差如图5所示. 计算结果显示, 在PIDC控制作用下, 方位轴与斜轴的指向均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)分别为0.441″和0.378″, 在DOSMC作用下, 方位轴与斜轴的指向RMSE分别为0.160″和0.163″, 该计算结果与图中曲线的直观表现相符. 显然, DOSMC对于随机风载扰动具有更好的抑制作用, 相比于传统算法, 该算法使得指向RMSE减少了1/2以上. 结合干扰观测器性能分析结果, 可以认为, 由于干扰观测器对于外部风载扰动力矩具有较好的观测效果, 再针对干扰的观测值进行针对性的处理, 使得基于该观测器的DOSMC取得了较好的干扰抑制效果.

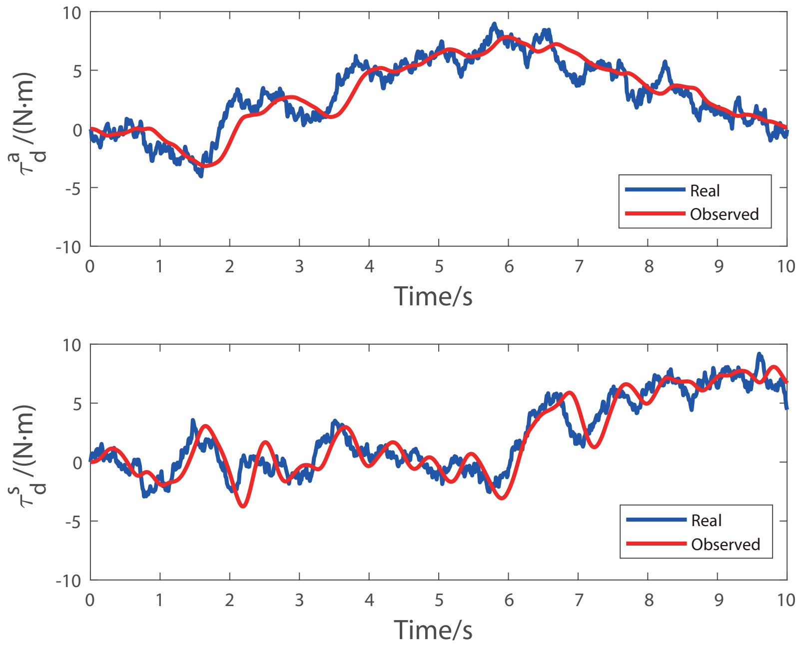

图 4　干扰观测器输出仿真结果曲线

Fig. 4　Curves of the output of disturbance observers in simulation

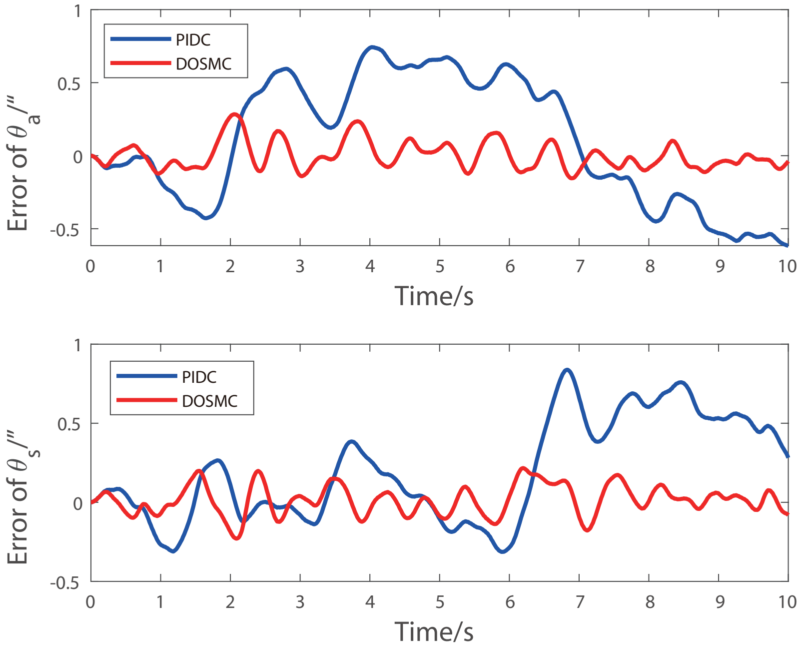

图 5 方位轴与斜轴角度误差仿真结果曲线

Fig. 5 Curves of angle error in the simulation for azimuth axis and slant axis

5 结论

本文提出了一套斜轴式望远镜动力学建模与鲁棒控制方法. 首先, 运用拉格朗日法建立斜轴式望远镜的刚体动力学模型. 接着, 用一阶模型近似描述系统的柔性, 并结合系统的外部干扰和不确定性建立描述斜轴式望远镜指向控制系统的多输入、多输出数学模型. 最后, 依据所建模型分别设计干扰观测器和滑模控制器, 实现了斜轴式望远镜的鲁棒控制. 仿真实验证明, 相比于传统的不基于模型的PID控制算法, 本文提出的控制算法可以更充分地利用斜轴式望远镜指向控制系统的先验知识, 使得系统具有更好的动态特性和鲁棒性.

参 考 文 献

[1] Yang J, Zuo Y X, Lou Z, et al. RAA, 2013, 13: 1493
[2] 娄铮, 程景全, 左营喜, 等. 天文学报, 2015, 56: 189
[3] Lou Z, Cheng J Q, Zuo Y X, et al. ChA&A, 2015, 39: 538
[4] 周旺平, 王雅, 巩力源. 计算机仿真, 2017, 34: 248
[5] 周旺平, 刘文, 刘伟. 光学精密工程, 2016, 23: 1664
[6] 杜彪, 伍洋, 张一凡, 刘国玺. 无线电通信技术, 2016, 42: 1
[7] Gawronski W. Modeling and Control of Antennas and Telescopes. Boston, MA: Springer, 2008: 95
[8] Chen W H, Yang J, Guo L, et al. ITIE, 2016, 63: 1083
[9] Edwards C, Spurgeon S K. Sliding Mode Control: Theory and Applications. London: Taylor & Francis, 1998: 86
[10] Johnson C. ITAC, 1970, 15: 222
[11] 董志明. 天文望远镜高精度控制技术. 成都：西南交通大学出版社, 2013: 25
[12] 田玉平, 蒋珉, 李世华. 自动控制原理. 北京: 科学出版社, 2006: 313
[13] Gawronski W. IAPM, 2004, 46: 50
[14] Simiu E, Scanlan R H. Wind Effects on Structures. New York: John Wiley & Sons Ltd, 1996: 157

Dynamic Modeling and Robust Control for Slant-Axis Telescope

LIANG Jing-si[1,2] WANG Hai-ren[1] ZUO Ying-xi[1] ZHANG Ming-zhu[1,2] GAO Jing-jing[1,2]
CHENG Wen-sheng[1,2] WANG Bo-cheng[1,2] ZHANG Tian-zhe[1,2]

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023)
(2 School of Astronomy and Space Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract The slant-axis telescope has a novel structure and its unique structural design is more suitable for extreme environment such as the South Pole. However, there is a lack of research on the dynamic modeling and the controller design of slant-axis telescopes at home and abroad. Firstly, the dynamical analysis of the slant-axis telescope is carried out. The 2-degree-of-freedom rigid body model of the telescope is established by the Lagrange method. Next, combining the flexibility of the driver system and disturbance, a mathematical model of the rigid-flexible coupling system of the slant-axis telescope is completed. Then, according to the mathematical model, a sliding mode controller based on the disturbance observer is designed to suppress the disturbance and realize the robust control of the slant-axis telescope. Finally, the simulation results show that the disturbance observer based sliding mode controller gets better dynamic performance and anti-disturbance characteristics than the traditional Proportion-Integration-Differentiation (PID) controller in the case of considering nonlinear external interference of the model.

Key words techniques: high angular resolution, pointing control, nonlinear control, miscellaneous